

水下任意刚性散射体对 Bessel 波的散射特性分析*

李威¹⁾²⁾³⁾ 李骏¹⁾ 龚志雄^{1)†}

1)(华中科技大学船舶与海洋工程学院, 武汉 430074)

2)(船舶和海洋水动力湖北省重点实验室, 武汉 430074)

3)(高新船舶与深海开发装备协同创新中心, 上海 200240)

(2014 年 11 月 5 日收到; 2015 年 2 月 28 日收到修改稿)

本文利用 Bessel 波的谐波展开式, 采用 T 矩阵方法的推导思路, 建立了水下任意刚性散射体在 Bessel 波照射下的声散射场计算公式. 以水下刚性椭球体和两端附连半球的刚性圆柱体为例, 计算了在不同波锥角 β 下的反向散射形态函数, 同时, 依据镜反射波和绕行波的干涉物理模型, 给出了预报 Bessel 波照射下的反向散射形态函数峰峰间隔值的计算模型. 仿真结果表明本文提出的 Bessel 波照射下反向散射形态函数峰峰间隔值预报方法是准确有效的, 同时也说明, 本文建立的基于 T 矩阵法计算水下任意刚性散射体在 Bessel 波束下的声散射场方法是有效的, 这拓展了 T 矩阵法的应用领域.

关键词: T 矩阵法, Bessel 波, 形态函数, 绕行波

PACS: 43.30.+m, 43.20.+g, 62.60.+v, 92.10.Vz

DOI: 10.7498/aps.64.154305

1 引言

声散射是由于声波在介质传播过程中碰到物体表面介质的声学特性不连续而出现的一种物理现象, 所以散射波总是在一定程度上携带了目标的相关信息, 通过对散射波进行分析处理, 可以得到目标的一些特征信息, 从而为水下目标的探测与识别提供了可能, 近几十年对于平面波的散射特性得到了广泛研究^[1-4], 1987 年, Durnin 通过实验得出了一种新的波束——Bessel 波束, Bessel 波束具有零阶 Bessel 函数形式, 且在其传播方向垂直的任一平面上的场强保持不变, 这一新颖特性引起了国内外许多学者的研究兴趣^[5], Maston 首先对刚性球体在 Bessel 波正入射下的散射特性进行了研究^[6], 利用分波序列对 Bessel 波进行了展开, 并给出了散射场形态函数随散射角 θ 的变化曲线. 2007 年, Maston 对弹性球体及球壳的 Bessel 波散射特性进行了研究^[7], 利用共振散射原理给出了 Bessel

波锥角 β 对纯弹性共振的影响. 2011 年, Li 等对弹性球体和球壳的 Bessel 波散射形态函数进行了研究, 并依据散射原理给出了预报其峰峰间隔的物理模型^[8]. 然而对于复杂几何形状物体的 Bessel 波散射计算, 目前国内外暂无这方面的研究成果, 本文致力于这一方向的研究.

本文首次利用 T 矩阵法, 以刚性椭球体和两端附连半球的刚性圆柱体为例, 分别研究了它们在 Bessel 波束下的散射特性, 并给出了在不同的波锥角下形态函数随无因次频率 ka 的变化曲线, 丰富了 Bessel 波束的散射特性研究.

2 T 矩阵法简介

为简便起见, 本节以椭球体的散射模型为例, 对 T 矩阵理论进行简介. 考虑一个外表面为 S , 长短半轴分别为 a 和 b 的刚性回旋椭球体位于理想水域里, 入射频率为 ω 的 Bessel 波束沿其旋转轴正入射, 其波锥角为 β , 如图 1 所示, 为简化计算, 本文

* 国家自然科学基金 (批准号: 40706019) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hustgzx@hust.edu.cn

的 Bessel 波束为零阶 Bessel 波束, 且忽略了时间因子 $e^{i\omega t}$ 对入射场和散射场的影响.

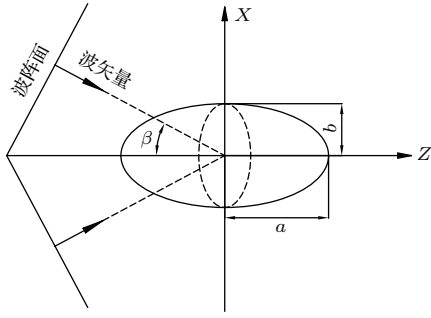


图 1 椭球体的 Bessel 波散射模型

Fig. 1. Scattering model of Bessel beam by prolate spheroid.

设入射场速度势为 ϕ^i , 散射场速度势为 ϕ^s , 则水下声场的总速度势 ϕ 可以表示为

$$\phi(r) = \phi^i(r) + \phi^s(r), \quad (1)$$

其中 r 代表声场中任意一点到原点的距离. 以上三个速度势均满足 Helmholtz 方程

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{bmatrix} \phi \\ \phi^i \\ \phi^s \end{bmatrix} = 0, \quad (2)$$

其中 k 表示入射波波数, 即

$$k = \frac{\omega}{c}. \quad (3)$$

对于以上三个场函数, Waterman 于 1969 年对其进行了详细的讨论^[9], 假设椭球体外表面 S 是光滑的, 根据 Poincare-Huygens 原理及高斯定理可以将 (2) 式中的声场表示如下:

$$\begin{aligned} & \phi^i(r) + \int_S [\phi_+ \mathbf{n} \cdot \nabla g(r, r') \\ & - (\mathbf{n} \cdot \nabla_+ \phi) g(r, r')] dS \\ & = \begin{cases} \phi(r), & r \text{ outside } S, \\ 0, & r \text{ inside } S. \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

上式中 ϕ_+ 和 $\mathbf{n} \cdot \nabla_+ \phi$ 分别表示椭球体表面的速度势及其法向量, $g(r, r')$ 表示自由空间格林函数, 其解析式如下:

$$g(r, r') = \frac{e^{ik|r-r'|}}{(k|r-r'|)}, \quad (5)$$

其中 r' 代表物体外表面上任意一点到原点的距离. 同时, 在外表面 S 上, 对于刚性体, 声场的边界条件

如下:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla \phi(r) = 0. \quad (6)$$

\mathbf{T} 矩阵的核心思想就是把所有的场函数分解为一系列的基函数 $\phi_{nm\sigma}$ 的级数相加, $\phi_{nm\sigma}$ 同时也满足 (2) 式形式的 Helmholtz 方程, 其解析式如下:

$$\begin{aligned} \phi_{nm\sigma}(r) &= \xi_{nm} h_n(kr) P_n^m(\cos \theta) \\ &\times \begin{pmatrix} \cos(m\varphi), & \sigma = e \\ \sin(m\varphi), & \sigma = o \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\xi_{nm} = \left(\varepsilon_m \frac{(2n+1)(n-m)!}{4\pi(n+m)!} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

上式中 $h_n(kr)$ 表示第一类球汉克尔函数, P_n^m 为连带勒让德函数, $\varepsilon_m = 2 - \delta_{m0}$ 表示纽曼因子, $\sigma = e, o$ (偶, 奇) 表示方位角的奇偶性.

根据 (4)–(6) 式, 可以将入射场 ϕ^i 及散射场 ϕ^s 表达如下:

$$\phi^i(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma} a_{nm\sigma} \text{Re} \phi_{nm\sigma}(r), \quad (9)$$

$$\phi^s(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma} f_{nm\sigma} \phi_{nm\sigma}(r), \quad (10)$$

其中 $a_{nm\sigma}$ 表示入射波系数, 在入射波确定的条件下可求出. $f_{nm\sigma}$ 表示散射波系数, 未知. $\text{Re} \phi_{nm\sigma}$ 表示在对入射场函数进行级数求和时用第一类 Bessel 函数 $j_n(kr)$ 代替基函数 $\phi_{nm\sigma}$ 中的 $h_n(kr)$ 函数进行求解.

同时, 散射场系数 $f_{nm\sigma}$ 与入射场系数 $a_{nm\sigma}$ 有如下关系:

$$f_{nm\sigma} = \sum_{n'=0}^{\infty} \sum_{m'=0}^{n'} \sum_{\sigma'} T_{nm, n'm'} a_{n'm'\sigma'}. \quad (11)$$

上式中的 $T_{nm, n'm'}$ 即为 \mathbf{T} 矩阵元素, 同时对于刚性体而言, 根据 Poincare-Huygens 原理, \mathbf{T} 矩阵亦可表示如下:

$$\mathbf{T} = -\mathbf{Q}^{-1} \text{Re} \mathbf{Q}. \quad (12)$$

上式中的矩阵 \mathbf{Q} 和 $\text{Re} \mathbf{Q}$ 与散射体外表面 S 及其边界条件有关, 矩阵元素的表达式如下:

$$Q_{nm\sigma, n'm'\sigma'} = \int_S \text{Re} \phi_{n'm'\sigma'} \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_{nm\sigma} dS. \quad (13)$$

更多有关 \mathbf{Q} 矩阵的物理意义及其表达式可参考文献^[10].

3 Bessel 入射波系数的推导

当 Bessel 波束正入射时 (如图 1 所示), 其入射速度势可表示为

$$\phi_B(z, \rho) = \phi_0 \exp(i\kappa z) J_0(\mu\rho), \quad (14)$$

上式中 ϕ_0 表示波幅, z 和 ρ 分别表示轴向和径向坐标, κ 和 μ 分别表示波数 k 的轴向和径向分量, 即有 $\kappa^2 + \mu^2 = k^2$, 同时 J_0 表示零阶 Bessel 函数.

由参考文献 [5] 可知, (14) 式可进一步转化为下式:

$$\begin{aligned} \phi_B(r, \theta) = \phi_0 \sum_{n=0}^{\infty} i^n (2n+1) j_n(kr) \\ \times P_n(\cos\theta) P_n(\cos\beta). \end{aligned} \quad (15)$$

同时利用勒让德函数的加法公式可以得出

$$\begin{aligned} P_n(\cos\theta) = \sum_{m=0}^n \varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \times P_n^m(\cos\theta_i) \\ \times P_n^m(\cos\theta_s) \cos m(\varphi_i - \varphi_s). \end{aligned} \quad (16)$$

上式中的 θ_i 和 θ_s 分别表示入射角和散射角, 结合 (7)–(8), (15)–(16) 式可以推导出零阶 Bessel 波的入射波系数 $a_{nm\sigma}$ 的表达式:

$$\begin{aligned} a_{nm\sigma}(r) = 4\pi\xi_{nm} i^n P_n^m(\cos\theta_i) P_n^m(\cos\beta) \\ \times \begin{pmatrix} \cos(m\varphi_i), & \sigma = e \\ \sin(m\varphi_i), & \sigma = o \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

需要指出的是, 本文讨论的入射波是单位波幅的, 且为正入射, 即 $\theta_i = 0$, 同时对于回旋结构的散射体, 在计算其散射场时, 可以忽略方位角 φ 对散射场的影响.

4 数值计算

利用 \mathbf{T} 矩阵法计算刚性椭球体的声散射问题主要包括以下三个步骤:

- 1) 利用 (17) 式计算 Bessel 入射波系数 $a_{nm\sigma}$;
- 2) 利用 (13) 式求出 \mathbf{Q} 矩阵, 进而由 (12) 式得出矩阵 \mathbf{T} ;
- 3) 利用 (10)–(11) 式得出散射场 ϕ^s .

本文仅考虑远场散射的情况, 同时远场散射速度势和远场散射形态函数 $|F|$ 之间有如下关系:

$$\phi^s = |F| \cdot \frac{e^{ikr}}{2r}. \quad (18)$$

图 2 给出的是远场散射, 收发合置 ($\theta_s = 180^\circ$) 情况下的反向散射形态函数图, 这里需要指出的是当 Bessel 波锥角 $\beta = 0^\circ$ 时, 入射波简化为平面波. 由图 2 可以看出: 不同波锥角对应的反向散射形态函数 $|F|$ 均随着入射波的无因次频率的增大而上下震荡, 说明收发合置情况下的总声场因为椭球体的存在也会有一定的波动. 且每条曲线的峰峰间隔大致是不变的, 这一点可以从该散射模型的几何分析中得到证明.

众所周知, 形态函数图出现峰值是因为刚体回波中的镜反射波和沿着物体表面传播的 Franz 波相互干涉的结果. 图 3 为 Bessel 波正入射下的干涉模型.

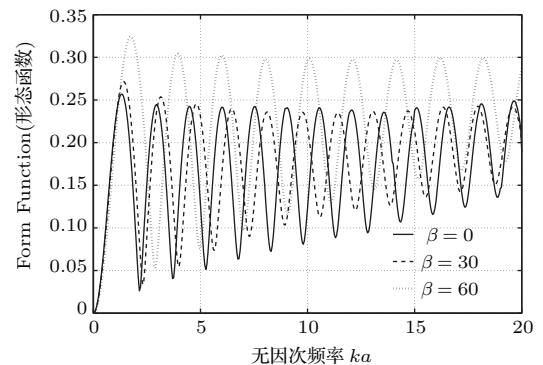


图 2 (网刊彩色) 长短半轴比为 $a/b = 4$ 的刚性回旋椭球体在 Bessel 波正入射下的反向散射形态函数

Fig. 2. (color online) Backscattering form function $|F|$ for Bessel beam scattering by a rigid prolate spheroid with semi-axis ratio $a/b = 4$.

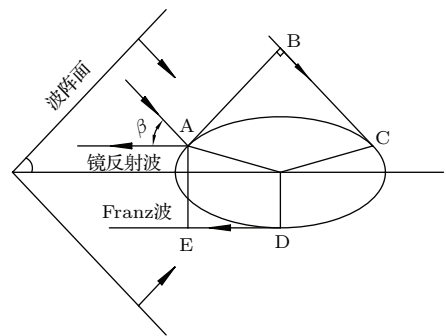


图 3 刚性椭球体在 Bessel 波入射下的干涉模型

Fig. 3. Interference model of Bessel beam by a rigid prolate spheroid.

在 Bessel 波的照射下, 刚性椭球体的外表面 A 点反射的回波沿着水平方向往回传播, 收发合置条件下将在远场接收到这一回波. 同时在外表面的 C 点, 位于该点的光束正好相切与椭球体外表面, 然后沿着外表面轮廓传播, 由 D 点往回传播, 这类波即为 Franz 波.

由图3可知, 在椭球体上的 Bessel 波散射, 镜反射波和 Franz 波传播的路径差为

$$\Delta d = \overline{BC} + CD + \overline{DE}. \quad (19)$$

假设 Franz 波的波速等于声波在水下传播的波速, 则形态函数曲线图上出现峰值的条件为

$$\Delta d = n\lambda, \quad (20)$$

其中 λ 为波长, 联立 (19) 和 (20) 式可以得到预报形态函数曲线峰峰间隔值的公式为

$$\Delta ka = \frac{2\pi a}{\Delta d} = \frac{2\pi a}{(\overline{BC} + CD + \overline{DE})}. \quad (21)$$

因为波锥角 β 的影响, (21) 式中各个曲线段的长度表达式比较复杂, 实际计算中可借助数值算法计算曲线段长, 进而得到峰峰间隔的预报值. 对于不同的波锥角, 表1给出了由 (21) 式计算出的峰峰间隔以及由图2直接读取的峰峰间隔值两者的比较.

表1 椭球体的峰峰间隔值 Δka 比较
Table 1. Comparison of the peak to peak interval Δka for prolate spheroid.

$\beta/(\circ)$	Δka	
	由 (21) 式计算	由图2直测
0	1.54	1.52
30	1.65	1.60
60	2.05	1.98

由表1可知, 几何分析得出的峰峰间隔值与在图2直接读取的峰峰间隔值非常吻合, 对于其他波锥角的 Bessel 波, 可以由 (21) 式预测其远场散射形态函数的峰峰间隔. 同时从表1可以得出: 波锥角越大, 形态函数峰峰间隔也越大.

由图2可以看出, 在不同波锥角的 Bessel 波正入射的情况下, 反向散射形态函数的幅值随波锥角的增大而增大, 这可以用亮点模型^[11,12]来解释. 当波锥角 $\beta = 0^\circ$ 时, 此时入射波简化为平面波, 对反向散射起主要贡献的是椭球长轴的顶点部分, 此时曲率半径较小, 亮点强度较弱, 对应的形态函数幅值较小. 随着波锥角的增加, 此时的 Bessel 波束中包含有非正入射成分, 目标表面的亮点向短轴移动, 曲率半径增大, 亮点强度随之增强, 形态函数的幅值也相应的增大.

除了椭球体以外, 两端附连半球的圆柱体同样是常见的散射模型. 对于这类特殊圆柱体, 图4给出了该散射模型. 同椭球体类似, 本文分析刚性圆柱体在 Bessel 波正入射下的远场散射.

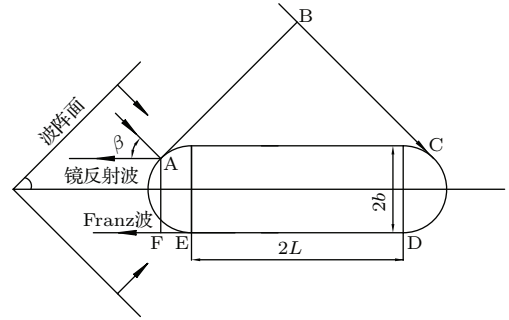


图4 几何特征比为 $(b+L)/b = 4$ 的刚性圆柱体在 Bessel 波正入射下的散射模型

Fig. 4. Scattering model of Bessel beam by a rigid finite cylinder with an aspect ratio of $(b+L)/b = 4$.

利用 T 矩阵法计算这类特殊圆柱体的声散射问题, 其计算过程和刚性椭球体的计算过程是类似的, 这里不作重复讨论, 图5给出的是几何特征比为 $(b+L)/b = 4$ 的圆柱体在不同的 Bessel 波正入射下的反向散射形态函数图.

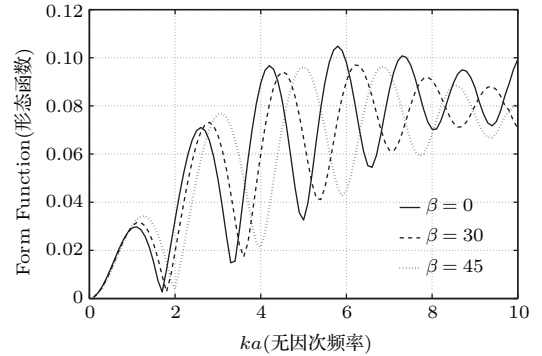


图5 (网刊彩色) 几何特征比为 $(b+L)/b = 4$ 的刚性圆柱体在 Bessel 波正入射下的反向散射形态函数

Fig. 5. (color online) Backscattering form function $|F|$ for Bessel beam scattering by a rigid cylinder with an aspect ratio of $(b+L)/b = 4$.

由图5可以看出, 这类特殊的圆柱体在不同波锥角的 Bessel 波正入射下的反向散射形态函数曲线也存在着不同程度的周期振荡. 并且不同波锥角对应的形态函数曲线上的峰峰间隔值也同样可以由图4所示的几何模型分析并计算.

由图4可知, 在圆柱体上的 Bessel 波散射, 镜反射波和 Franz 波传播的路径差可以表示为

$$\Delta d = \overline{BC} + CD + \overline{DF}. \quad (22)$$

对 (22) 式进行化简可得

$$\begin{aligned} \Delta d = & 2b \cos(\beta/2) + 2L + b(\pi - \beta) \\ & + 2L \cos \beta. \end{aligned} \quad (23)$$

易知对于这类圆柱体, 其反向散射形态函数曲线的峰峰间隔可表示如下:

$$\begin{aligned} \Delta ka = & \frac{2\pi a}{\Delta d} \\ = & 2\pi a \times [2b \cos(\beta/2) + 2L + b(\pi - \beta) \\ & + 2L \cos \beta]^{-1}. \end{aligned} \quad (24)$$

类似地, 表 2 给出了由 (24) 式计算出的峰峰间隔与由图 5 直接读取的峰峰间隔值者的比较.

表 2 圆柱体的峰峰间隔值 Δka 比较
Table 2. Comparison of the peak to peak interval Δka for cylinder.

$\beta/(^\circ)$	Δka	
	由 (24) 式计算	由图 5 直测
0	1.46	1.47
30	1.60	1.67
45	1.74	1.82

由表 2 可知, (24) 式可准确地预测这类两端附连半球的圆柱体在 Bessel 波正入射下的反向散射形态函数的峰峰间隔.

由图 5, 在不同波锥角的 Bessel 波正入射的情况下, 反向散射形态函数的幅值随波锥角的变化较小. 这是因为在不同的波锥角下, 虽然包含有非正入射成分的 Bessel 波使亮点发生移动, 但圆柱体端部附连的半球曲率半径一样, 亮点强度变化较小, 因此反向散射形态函数的幅值变化较小.

5 结 论

本文根据已有的 T 矩阵理论, 以刚性椭球体和两端附连半球的圆柱体为例, 在国际上首次对这类

形状复杂的散射体的 Bessel 波束散射特性进行了分析, 并分别给出了他们在 Bessel 波正入射下的远场散射形态函数曲线, 同时从几何模型上深入分析了形态函数图的周期振荡的机理, 给出了预测其峰峰间隔值的计算公式, 并用亮点模型解释了不同波锥角的 Bessel 波束照射下, 散射形态函数幅值的变化规律. 本文可进一步应用于其他复杂刚性散射体的 Bessel 波散射特性研究.

本文所讨论的入射波为最简单的 Bessel 波: 零阶 Bessel 波, 对于其他高阶的 Bessel 波, (15) 式不再适用, 此时的 Bessel 波速度势将更加复杂, 更多有关高阶 Bessel 波的理论, 可参考文献 [13], 对于高阶 Bessel 波的散射特性, 仍需进一步的研究.

参考文献

- [1] Williams K L, Marston P L 1985 *J. Acoust. Soc. Am.* **78** 1093
- [2] Houston B H, Bucaro J A, Photiadis D M 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **98** 2851
- [3] Gabrielli P, Mercier-Finidori M 2001 *J. Sound Vib.* **241** 423
- [4] Li W 2004 *Ph.D. Dissertation* (Singapore: National University of Singapore)
- [5] Durnin J 1984 *J. Opt. Soc. Am. A* **4** 651
- [6] Marston P L 2007 *J. Acoust. Soc. Am.* **121** 753
- [7] Marston P L 2007 *J. Acoust. Soc. Am.* **122** 247
- [8] Li W, Qu H F 2013 *Acta Acustica* **38** 42
- [9] Waterman P C 1969 *J. Acoust. Soc. Am.* **54** 1417
- [10] Li W, Zhao Y, Zhang T, Liu J X 2007 *Technical Acoustics* **26** 844 (in Chinese) [李威, 赵耀, 张涛, 刘敬喜 2007 声学技术 **26** 844]
- [11] Fan J, Zhu B, Tang W 2001 *Acta Acustica* **26** 545 (in Chinese) [范军, 朱蓓丽, 汤渭霖 2001 声学学报 **26** 545]
- [12] Fan J, Liu T, Tang W 2002 *Technical Acoustics* **21** 153 (in Chinese) [范军, 刘涛, 汤渭霖 2002 声学技术 **21** 153]
- [13] Marston P L 2008 *J. Acoust. Soc. Am.* **124** 2905

Study on underwater acoustic scattering of a Bessel beam by rigid objects with arbitrary shapes*

Li Wei¹⁾²⁾³⁾ Li Jun¹⁾ Gong Zhi-Xiong^{1)†}

1) (School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University Of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

2) (Hubei Key Laboratory of Naval Architecture & Ocean Engineering Hydrodynamics (HUST), Wuhan 430074, China)

3) (Collaborative Innovation Center for Advanced Ship and Deep-Sea Exploration (CISSE), Shanghai 200240, China)

(Received 5 November 2014; revised manuscript received 28 February 2015)

Abstract

Study on underwater acoustic scattering is very important for detection, location, and recognition of underwater targets. In the past decades, most investigations in this respect were focused on the case of plane wave incidence. But the Bessel beam is a kind of approximate non-diffracting beam with an excellent directing property, so more attention should be paid on it. So far, according to the literature, the studies about underwater acoustic scattering of a Bessel beam mainly focused on spheres and spherical shells using the partial wave series form. When the scatterers become complex objects, the partial wave series form fails to deal with these kinds of problems. To overcome this shortage, the \mathbf{T} -matrix method has been introduced to calculate the underwater scattering of a Bessel beam by complex rigid objects.

In this paper, the underwater acoustic scattering of a Bessel beam by rigid objects with arbitrary shapes calculated by \mathbf{T} -matrix method is studied. By means of the harmonic expansion of Bessel beam, the expression of the incident coefficient can be derived. Through the transmission matrix that relates the known coefficients of expansion of an incident wave to the unknown expansion coefficients of the scattered field, the acoustic scattering formula of a Bessel beam by a rigid scatterer with arbitrary shape is established. In this paper, the backscattering fields of rigid spheroids and finite cylinders with two spheroidal endcaps are discussed, and the backscattering form function modulus $|F|$ is curved as a function of dimensionless frequency ka . Subsequently, the peak to peak intervals in backscattering form function caused by the interference of the specular wave and the Franz wave are also analyzed in geometry. The calculated results show that the frequency interval obtained from the curves agrees well with those obtained by geometric analysis for the rigid objects. Meanwhile, for both the rigid spheroid and finite cylinder, the highlight model is successfully applied to explain the phenomenon in which the amplitude of backscattering form function changes with the cone angle of the Bessel beam. From the above numerical results and analysis, the \mathbf{T} -matrix method has been successfully introduced to calculate the acoustic scattering of the Bessel beam by complex objects, which extends the application of the \mathbf{T} -matrix method and provides a useful tool to explore the characteristics of the Bessel beam.

Keywords: \mathbf{T} -matrix method, Bessel beam, form function, Franz wave

PACS: 43.30.+m, 43.20.+g, 62.60.+v, 92.10.Vz

DOI: 10.7498/aps.64.154305

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40706019).

† Corresponding author. E-mail: hustgzx@hust.edu.cn